 Seminar: Diophantische Approximation

Satz von Siegel-Shidlovsky

Teil 1

Notation

Sei $||\alpha|| := \max_\sigma |\sigma\alpha|$, also das Maximum der Absolutbeträge der Konjugierten von α

Definition: E-Funktion

Sei K ein Zahlkörper. Eine Funktion, die sich als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n}{n!} \qquad ; \alpha_n \in K$$

darstellen läßt und die folgenden Bedingungen erfüllt, heißt $E-Funktion$:

E1: Es gibt eine Konstante c, so daß $||\alpha_n|| \leq c^n$

E2: Es gibt eine Folge (d_n), $d_n \in \mathbf{N}$, so daß d_n ein Nenner für alle $\alpha_k, (k = 0, ..., n)$ ist und es gilt

$d_n \leq c^n$

Definition: algebraisch unabhängig

Sei K eine Körpererweiterung von $\mathbf{Q}$. Eine Menge von Elementen $a_1, ..., a_n$ heißt algebraisch unabhängig, wenn es kein Polynom $P(a_1, ..., a_n)$ mit Koeffizienten, nicht alle gleich Null, aus K gibt, so daß $P(a_1, ..., a_n) = 0$

Satz von Lindemann

Seien $\alpha_1, ..., \alpha_s$ linear unabhängig über den rationalen Zahlen und algebraisch. Dann sind $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_s}$ algebraisch unabhängig.

Definitionen

Sei im folgenden:

$K = \mathbf{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_s)$, also die kleinste Körpererweiterung, die $\mathbf{Q}$ und die α_i's enthält.

Seien $\beta_1, ..., \beta_m$ paarweise verschiedene Elemente von K und ungleich Null.

Seien $E_j, (j = 1, ..., m)$ die m E-Funktionen $E_j(z) = e^{\beta_j z}$

Sei I_K der Ring der ganzalgebraischen Zahlen in K

Sei $F_1(z) = P_1(z)e^{\beta_1 z} + ... + P_m(z)e^{\beta_m z}$ mit Polynomen $P_1, ..., P_m$, die Koeffizienten in I_K haben und nicht alle gleich Null sind

Lemma 1

Zu einem gegebenen $n \in \mathbf{N}$ findet man Polynome $P_j \in I_K[z]$, die nicht alle Null sind, so daß

(i) deg $P_j < 2n$ und $||P_j|| \leq c^n n^{2n}$

(ii) die Funktion F_1 hat eine Nullstelle der Ordnung $\geq (2m-1)n$ an der Stelle Null

(iii) Wenn F_1 dargestellt wird als

$$F_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$$

dann gilt $|a_\nu| \leq c^\nu c^n n^{2n}$

Siegelsches Lemma (verallgemeinert)

Sei K ein Zahlkörper. Sei

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{r1}x_1 + ... + \alpha_{rn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten in K und sei $n > r$. Sei A eine Zahl, für die gilt: $||\alpha_{ij}|| \leq A$ für alle i, j. Sei $d_i (i = 1, ..., r)$ ein gemeinsamer Nenner der Koeffizienten der i-ten Gleichung und sei $d = \max d_i$.

Dann gibt es eine nicht triviale Lösung X in I_K, so daß $||X|| \leq C_1(C_2 ndA)^{r/(n-r)} + C_1$ wobei C_1, C_2 Konstanten sind, die von K abhängen

Lemma 2

Sei $F_{k+1} = D^k F_1$. Schreibe $F_k = P_{k1}E_1 + ... + P_{km}E_m$ mit Polynomen P_{kj}.

Dann ist der Rang der Matrix $(P_{kj}), (k, j = 1, ..., m)$ gleich m

Lemma 3

Für irgendein $\xi \in \mathbf{C}$, $\xi \neq 0$, gilt: die Matrix $(P_{kj}(\xi)), (k = 1, ..., m+n; j = 1, ..., m)$ hat den Rang m

Lemma 4

Sei $\alpha \in K, \alpha \neq 0$. Sei $k \leq m + n$. Wenn $n \geq c_2(\alpha)$, dann gilt

$|F_k(\alpha)| \leq c_3^n n^{3n} n^{-(2m-2)n}$

$||P_{kj}(\alpha)|| \leq c_3^n n^{3n}$ und den$(P_{kj}(\alpha)) \leq c_3^n$

wobei den$(P_{kj}(\alpha))$ der kleinste gemeinsame Nenner der $P_{kj}(\alpha)$ ist.

Definition: $\prec$

Gilt für zwei Potenzreihen $A = \sum a_n x^n, B = \sum b_n x^n$, daß $|a_n| \leq b_n$, dann schreibt man $A \prec B$

Definition: Rang

Seien $a_1, ..., a_m$ komplexe Zahlen. Wir sagen, daß sie den Rang r bezüglich des algebraischen Körpers K haben, wenn sie genau $m - r$ homogenen linearen Gleichungen

$\lambda_{k1}a_1 + ... + \lambda_{km}a_m = 0, (k = 1, ..., m - r)$

mit $\lambda_{kj} \in K$ genügen.

Lemma 5

Der Rang von $E_1(\alpha), ..., E_m(\alpha)$ über K ist $\geq m/2[K : \mathbf{Q}]$

Definition: höhe

höhe(α) :=max (log d, log $|\sigma\alpha|$)

wobei d der kleinste Nenner für α ist und σ über alle Einbettungen von K nach $\mathbf{C}$ läuft

Teil 2

Shidlovskysches Lemma

Sei $Y = {}^t(y_1, ..., y_m)$, mit $y_1, ..., y_m$ Potenzreihen, die über $K(z)$ linear unabhängig sind und Lösung einer linearen Differentialgleichung $Y' = QY$ sind, wobei Q eine Matrix von rationalen Funktionen ist. Seien $P_1, ..., P_m$ Polynome in $K[z]$ und sei $F_1 = P_1y_1 + ... + P_my_m$.

Sei T das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Q_{ij} und sei $F_k = TDF_{k-1} = P_{k1}y_1 + ... + P_{km}y_m$.

Sei r der Rang der Matrix $(P_{kj}), (k, j = 1, ..., m)$ und $r < m$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_0 F_1 \leq r(\max \deg P_j) + c_0$$

wobei c_0 positiv ist und nur von $y_1, ..., y_m$ und Q, nicht aber von den P_j abhängt.

Lemma 2.1

Seien $\varphi_1, ..., \varphi_n$ Potenzreihen in $K[[z]]$ und sei $d \in \mathbf{N}$. Seien $P_1, ..., P_n$ Polynome in $K[z]$ mit Grad $\leq d$. Dann gibt es ein $N \in \mathbf{N}$, so daß entweder $F = P_1\varphi_1 + ... + P_n\varphi_n$ gleich Null ist, oder $\mathrm{ord}_0 F \leq N$.

Lemma 2.2

Seien V, W Vektorräume, die aus Potenzreihen bestehen und endlich dimensional über K sind. Seien $\varphi \in V, \psi \in W;\ \varphi, \psi \neq 0$, so daß φ/ψ eine rationale Funktion ist.
Dann gibt es ein $N \in \mathbf{N}$, für das gilt

$\deg \varphi/\psi \leq N$.

Dabei ist $\deg(\varphi/\psi)$ =max(deg φ, deg ψ).

Lemma 2.3

Seien $\varphi_1, ..., \varphi_m$ Potenzreihen, linear unabhängig über K. Dann ist die Wronski-Determinante

$$W(\varphi_1, ..., \varphi_m) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_2^{(m-1)} & \cdots & \varphi_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

nicht Null.

Korollar zu 2.3

Sei $m > r$ und seien $\varphi_1, ..., \varphi_m$ Lösungen in $K[[z]]$ der Differentialgleichung
$\psi_r D^r y + \psi_{r-1} D^{r-1} y + ... + \psi_0 y = 0$,
wobei $\psi_0, ..., \psi_r \in K[[z]]$ und $\psi_r \neq 0$. Dann sind $\varphi_1, ..., \varphi_m$ linear abhängig über K.

Lemma 2.4

Sei die Matrix Q gegeben. Seien $P_1, ..., P_m$ Polynome, so daß r der Rang der Matrix (P_{kj}) ist und $r < m$ gilt. Schreibe (P_{kj}) durch Vertauschung von Spalten als (P_I, P_{II}), wobei P_I eine nichtsinguläre $r \times r$ Matrix und P_{II} eine $r \times (m-r)$ Matrix ist, also (nach eventueller Umindizierung):

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1r} & P_{1,r+1} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{r1} & \cdots & P_{rr} & P_{r,r+1} & \cdots & P_{rm} \end{pmatrix}$$

Dann gibt es ein $N \in \mathbf{N}$ und eine Matrix A rationaler Funktionen, so daß $P_{II} = P_I A$, wobei die Grade der rationalen Funktionen in $A \quad \leq N$ sind.

Teil 3

Satz von Siegel-Shidlovsky

Seien $f_1, ..., f_s$ E-Funktionen, algebraisch unabhängig über $K(z)$, die Lösung einer linearen Differentialgleichung $X' = Q^* X$ sind, wobei $X = {}^t(X_1, ..., X_s)$ und $Q^* = (Q^*_{ij})$, $(i, j = 1, ...s)$ eine Matrix rationaler Funktionen in $K(z)$ über dem Zahlkörper K sind. Sei $\alpha \in K, \alpha \neq 0$ und verschieden von den Polen der Q^*_{ij}. Dann sind $f_1(\alpha), ..., f_s(\alpha)$ algebraisch unabhängig.

Lemma 1

Seien $E_1, ..., E_m$ linear unabhängige E-Funktionen mit Koeffizienten in K, und sei $n \in \mathbf{N}$. Dann gibt es Polynome $P_1, ..., P_m \in I_K[z]$, nicht alle Null, so daß gilt:
(i) deg $P_j < 2n$ und $||P_j|| \leq c^n n^{2n}$
(ii) Die Funktion $F_1 = P_1 E_1 + ... + P_m E_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$ hat eine Nullstelle der Ordnung $\geq (2m-1)n$ an der Stelle Null.
(iii) Für die a_ν aus (ii) gilt: $|a_\nu| \leq c^\nu c^n n^{2n}$.

Lemma 2

Seien E_j, P_j, F_1 wie in Lemma 1, wobei $(E_1, ..., E_m)$ Lösung einer linearen Differentialgleichung $Y' = QY$ ist ($Q = (Q_{ij})$ wieder Matrix rationaler Funktionen in $K(z)$).

Definiere induktiv $F_k = TDF_{k-1} = P_{k1}E_1 + ... + P_{km}E_m$ mit Polynomen P_{kj}, wobei $T \in I_K[z]$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Q_{ij} ist. Sei $n \in \mathbf{N}$ mit $n > c_0'$, wobei c_0' nur von den E_j und von Q abhängt. Dann ist der Rang der Matrix (P_{kj}), $(k, j = 1, ..., m)$, gleich m.

Lemma 3

Sei $\xi \in \mathbf{C}$, $\xi \neq 0$ und keine Nullstelle von T, dann hat die Matrix

$$(P_{kj}(\xi)) \qquad (k = 1, ..., n + c_5; j = 1, ..., m)$$

den Rang m.

Lemma 4

Sei $\alpha \in K, \alpha \neq 0$ und keine Nullstelle von T. Sei $k \leq n + c_5$ und sei $n \geq c_6$. Dann gilt:

$$|F_k(\alpha)| \leq c_7^n n^{3n} n^{-(2m-2)n}$$

$$||P_{kj}(\alpha)|| \leq c_8^n n^{3n} \qquad \text{und } \mathrm{den}(P_{kj}(\alpha)) \leq c_8^n$$

Lemma 5

Der Rang von $E_1(\alpha), ..., E_m(\alpha)$ über K ist $\geq m/2[K : \mathbf{Q}]$

Literatur:

Lang, Serge (1966): Introduction to Transcendental Numbers, New York, Addison-Wesley
Siegel, Carl Ludwig (1967): Transzendente Zahlen, Mannheim, Hochschultaschenbücher-Verlag

e-Mail:larsperle@gmx.de